

Содержание

Глава I. Частично упорядоченное банахово пространство.

1.1. Основные определения.....	4
1.2. Свойства предела в частично упорядоченном B -пространстве.....	6
1.3. Положительные операторы и их свойства.....	6

Глава II. Мажорирование нелинейных операций.

2.1. Основные определения и утверждения.....	9
2.2. Процесс двусторонних приближений.....	10
2.3. Модифицированный метод Чаплыгина.....	11
2.4. Применение модифицированного метода Чаплыгина к решению дифференциального уравнения с запаздыванием.....	12

Глава III. Метод модулярных мажорант в полуупорядоченном B -пространстве.

3.1. Основные определения и утверждения.....	15
3.2. Метод модулярных мажорант на порядковом отрезке KB -линеала....	17
3.3. Применение метода модулярных мажорант на порядковом отрезке KB -линеала к задаче для дифференциального уравнения.....	19
3.4. Применение метода модулярных мажорант к задачам для полулинейных операторного и дифференциального уравнений.....	21
3.5. Применение метода модулярных мажорант к уравнению в частных производных гиперболического типа.....	24

Литература.....	27
-----------------	----

Глава I. Частично упорядоченное банахово пространство.

1.1. Основные определения

Определение. Линейное пространство X называется *частично упорядоченным* (далее ч. у. ЛП), если в нем выделено множество элементов $x > 0$, удовлетворяющее условиям:

$$(x, y > 0, c > 0) \Rightarrow (x \neq 0, x + y > 0, c \cdot x > 0).$$

По определению, $x > y$, $y < x$, если $x - y > 0$. Элемент $x \geq 0$ называется *положительным*. Соотношения $x \leq y$ называются **сравнимостью**, а элементы – *сравнимыми*.

Примеры. 1) В конечномерных пространствах R^n, m_n сравнимость $x > 0$ имеет покоординатный смысл: данный элемент является вектором:

$$x = (x_k) > 0: \forall x_k \geq 0, \exists x_k > 0.$$

2) В пространстве C непрерывных функций сравнимость $x > 0$ имеет поточечный смысл: функция $x(t) \geq 0$ всюду и отлична от тождественного нуля, т. е. существуют такие точки t (а следовательно, и интервалы), в которых значения $x(t) > 0$.

3) В пространствах измеримых функций, в том числе в пространствах L_∞, L_p , сравнимость $x > 0$ означает, что функция $x(t) \geq 0$ п. в. и не эквивалентна нулю, т.е. мера $mes\{t : x(t) \neq 0\} > 0$. $\square$

В ч. у. ЛП, не являющихся вполне упорядоченными пространствами, имеются несравнимые пары элементов.

Примеры. 1) Векторы $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$ несравнимы.

2) В пространстве $C(-1, 1)$ пара функций $x = t$, $y = -t$ несравнима. $\square$

Сравнимость в ч. у. ЛП обладает многими свойствами сравнимости в указанных конкретных пространствах. Например, $(x < y, c > 0) \Rightarrow (cx < cy)$, так как $cy - cx = c(y - x) > 0$. Приведем еще несколько свойств:

- $(x < y) \Rightarrow (x \pm z < y \pm z)$, т.к. $y \pm z - (x \pm z) = y - x > 0$;
- $(x < y, z < u) \Rightarrow (x + z < y + u)$, т.к. $y + u - (x + z) = (y - x) + (u - z) > 0$;
- Сравнимость транзитивна: $(x < y < z) \Rightarrow (x < z)$, т. к. $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$.

Определение. Множество $[x, z] = \{y : x \leq y \leq z\}$ называется **порядковым отрезком**.

Пример. В n -мерных пространствах векторов $x = (x_i)$ порядковый отрезок является n -мерным ориентированным прямоугольником ("стороны параллельны осям координат"):

$$[x, z] = \{y : x_i \leq y_i \leq z_i, \forall i\}. \square$$

Порядковый отрезок является выпуклым множеством:

$$(u, v \in [x, z]) \Rightarrow (\lambda u + \mu v \in [x, z] : 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda + \mu = 1),$$

так как из соотношений сравнимости $x \leq u \leq z, x \leq v \leq z$ следует, что $\lambda x \leq \lambda u \leq \lambda z, \mu x \leq \mu v \leq \mu z$ и, после почленного сложения, имеем, что $x \leq \lambda u + \mu v \leq z$.

В частности, порядковый отрезок содержит в себе линейный отрезок с теми же концами.

Определение. Ч. у. ЛП X называется *частично упорядоченным B -пространством*, если X – B -пространство, и выполняются условия

1) норма изотонна:

$$(0 < x < y) \Rightarrow (\|x\| \leq \|y\|),$$

2) множество положительных элементов замкнуто:

$$(x_n \geq 0, x_n \rightarrow x) \Rightarrow (x \geq 0).$$

Замечание: Сходимость последовательности элементов, ограниченность линейного оператора, сильная сходимость последовательности операторов, непрерывность операции или соотношения понимаются по норме (а не в порядковом смысле), $x_n \rightarrow x : \|x_n - x\| \rightarrow 0$ и т.п.

Примеры. Пространства $R^n, m_n, C, L_\infty, L_p$ являются ч. у. B -пространствами. Изотонность нормы очевидна. Так, в пространстве L_p она следует из изотонности интеграла Лебега и степенных функций $x^p, x^{1/p}$ ($p \geq 1$). Выполнение условия 2) в пространствах R^n, m_n следует из покоординатной сходимости и из сохранения нестрогого неравенства в пределе числовой последовательности. В пространствах C (или L_∞) сходимость равномерная всюду (или п. в.) и, следовательно, поточечная всюду (или п. в.) Поэтому условие 2) также выполнено. $\square$

Отметим, что в пространствах R^n, L_p норма строго изотонна: $(0 < x < y) \Rightarrow \|x\| < \|y\|$, а в пространствах m_n, C, L_∞ существуют такие элементы x, y , что $0 < x < y, \|x\| = \|y\|$.

Примеры. 1) В пространстве m_2 векторы $x = \{1, 3\} < y = \{2, 3\}, \|x\| = \|y\| = 3$.
2) В пространстве $C(0,1)$ функции $x(t) = t, y(t) \equiv 1, \|x\| = \|y\| = 1$. $\square$

Введем следующие обозначения сходимости снизу и сверху:

$$x_n \uparrow x: x_n \leq x_{n+1} \rightarrow x; \quad y_n \downarrow y: y_n \geq y_{n+1} \rightarrow y.$$

1.2. Свойства предела в частично упорядоченном B -пространстве.

1) $(0 \leq x_n \leq y_n \rightarrow 0) \Rightarrow (x_n \rightarrow 0)$, т. к. норма изотонна.

2) $(x_n \leq y_n \leq z_n, x_n \rightarrow x, z_n \rightarrow x) \Rightarrow (y_n \rightarrow x)$.

Действительно, $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n \rightarrow 0$, $y_n - x_n \rightarrow 0$, $y_n = (y_n - x_n) + x_n \rightarrow x$.

3) Сравнимость непрерывна: $(x_n \leq y_n, \forall n, x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y) \Rightarrow (x \leq y)$,

т. к. вычитание непрерывно, а множество положительных элементов замкнуто,

$$y_n - x_n \geq 0, y_n - x_n \rightarrow y - x, y - x \geq 0.$$

4) Порядковый отрезок замкнут (относительно предела):

$$(x \leq y_n \leq z, y_n \rightarrow y) \Rightarrow (x \leq y \leq z), \text{ т. к. сравнимость непрерывна.}$$

5) $(x_n \uparrow x \text{ (или } \downarrow)) \Rightarrow (x_n \leq x \text{ (или } \geq))$. Действительно, в случае сходимости снизу $x_n \leq x_m$ при $n \leq m$, т. к. сравнимость транзитивна. Зафиксируем номер n и устремим $m \rightarrow \infty$. Тогда $x_n \rightarrow x_n$, $x_m \rightarrow x$. Сравнимость непрерывна, $x_n \leq x$.

Лемма 1. Если

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \quad (n = \overline{0, \infty}), \quad (1)$$

$$v_n - u_n \rightarrow 0, \quad (2)$$

то на порядковом отрезке $[u_0, v_0]$ существует такой элемент x^* , что

$$u_n \uparrow x^*, \quad v_n \downarrow x^*,$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} v_n - x^* \\ x^* - u_n \end{Bmatrix} \leq v_n - u_n. \quad (3)$$

Доказательство. Для номеров $m > n$ из соотношений (1) и транзитивности сравнимости следует, что $u_0 \leq u_n \leq u_m \leq v_m \leq v_n \leq v_0$, $[u_n, v_n] \subset [u_0, v_0]$, $0 \leq v_n - v_m \leq v_n - u_n$. Норма изотонна, $\|v_n - v_m\| \leq \|v_n - u_n\| \rightarrow 0$ ($m > n \rightarrow \infty$), по условию (2). Последовательность v_n сходится в себе, значит в B -пространстве существует предел, $v_n \downarrow x^*$. Отсюда и из условия (2) следует $u_n = v_n + (u_n - v_n) \rightarrow x^*$, $u_n \uparrow x^*$. По свойству 5), предел $x^* \in [u_n, v_n]$, поэтому $x^* \in [u_0, v_0]$ и имеют место сравнимости (3). $\square$

1.3. Положительные операторы и их свойства.

Рассмотрим X, Y – частично упорядоченные B -пространства.

Определение. Линейный оператор $L: X \rightarrow Y$ называется **положительным**, $L > 0$, если $(x > 0) \Rightarrow (Lx \geq 0)$, и существует такой элемент $x > 0$, что образ $Lx > 0$.

Примеры. 1) $L: R^n \rightarrow R^m$, $L \leftrightarrow (g_{ik})$, $\forall g_{ik} \geq 0$, $\exists g_{ik} > 0$.

2) $X = Y = C(a, b)$, $Q = [a, b] \times [a, b]$, $G \in C(Q)$, $(Lx)(s) = \int_a^b G(s, t)x(t)dt$,
 $G(s, t) \geq 0$, $\forall (s, t)$; $\exists (s, t): G(s, t) > 0$.

3) $X = Y = L_2(a, b)$, $G \in L_2(Q)$, $G(s, t) \geq 0$ почти всюду на Q ,
 $mes\{(s, t): G(s, t) \neq 0\} > 0$, оператор L см. в примере 2). $\square$

Сравнимость $L > K$, по определению, означает $L - K > 0$.

Свойства положительных операторов.

Далее рассмотрим линейные операторы $L, L_k, S: X \rightarrow Y$.

1) Оператор $L > 0$ изотонен: $(x < y) \Rightarrow (Lx \leq Ly)$, т. к. $Ly - Lx = L(y - x) \geq 0$.

2) $(L_k \geq 0, k = \overline{1, n}) \Rightarrow (\sum_1^n L_k \geq 0)$, т. к. образы элемента $x > 0$: $\sum_1^n L_k x \geq 0$,
 по определению ч. у. ЛП.

3) $(L_0 > 0, L_k \geq 0, k = \overline{1, n}) \Rightarrow (S_n \stackrel{def}{=} \sum_0^n L_k \geq L_0)$, по свойству 2).

4) $(S \geq L_0 > 0) \Rightarrow (S > 0)$, т. к. при всех $x > 0$: $Sx \geq L_0 x > 0$,
 $\exists x > 0: L_0 x > 0, Sx > 0$.

5) Пусть л. о. операторы $L_0 > 0, L_k \geq 0 (k = \overline{1, \infty})$, ряд $\sum_0^\infty L_k$ сильно сходится к л. о. оператору S . Тогда $S > 0$.

Доказательство свойства 5. Из сильной сходимости последовательности частичных сумм $S_n \rightarrow S$ следует слабая сходимость: $S_n x \rightarrow Sx$. Для произвольного элемента $x > 0$, по свойству 3), $S_n x \geq L_0 x$. Сравнимость непрерывна, $Sx \geq L_0 x, S \geq L_0$. По свойству 4), оператор $S > 0$. $\square$

6) Если $L > 0$, линейный оператор $K > 0$ отображает Y в ч. у. B -пространство Z , то композиция $KL \geq 0$. $\square$

Пример нулевой композиции ненулевых операторов: $X = Y = Z = R^2$, произвольные векторы $x = \{a, b\}$, проекторы $Lx = \{a, 0\}$, $Kx = \{0, b\}$, композиция $KL = 0$. $\square$

7) Если $X = Y, L > 0$, то итерации $L^n \geq 0$. $\square$

Пример нулевой итерации ненулевого оператора: $X = R^2$, произвольные векторы $x = \{a, b\}$, образы $Lx \stackrel{def}{=} \{0, a\}$, $L^2 x = \{0, 0\}$, итерация $L^2 = 0$. $\square$

8) Если линейный оператор L имеет обратный $L^{-1} > 0$, то $(y > 0) \Rightarrow (L^{-1}y > 0)$. Действительно, образ $L^{-1}y \geq 0$. Допустим, что он нулевой. Тогда $y = LL^{-1}y = 0$, противоречие. $\square$

Лемма 2. Если линейный ограниченный оператор $L: X \rightarrow X$ удовлетворяет условию

$$L > 0, \quad \|L^n\| \leq l_n \quad (n \geq 1), \quad l = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l_n < \infty,$$

то существует положительный обратный оператор $S = (I - L)^{-1}: X \rightarrow X$, $S > 0$, $\|S\| \leq l$. (Здесь $Ix \equiv x$).

Доказательство. Обозначим $L_n = L^n$. Тогда $L_0 = I > 0$, $L_1 = L > 0$, $L_n \geq 0$ ($n \geq 2$), по свойству 7) операторов. Ранее было установлено, что в B -пространстве $X \rightarrow X$ линейных ограниченных операторов ряд сходится: $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} L^n = (I - L)^{-1}$, $\|S\| \leq l$. По свойству 5) положительных операторов, $S > 0$. $\square$

Глава II. Мажорирование нелинейных операций.

2.1. Основные определения и утверждения.

Определение. Пусть операция A отображает множество $E \subset X$ в Y . Линеинные операторы $L, K: X \rightarrow Y$ называются соответственно мажорантой и минорантой операции A на множестве E , если при $x, x + \Delta x \in E$, $\Delta x > 0$

$$K\Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq L\Delta x.$$

Определение. Если значения $A(x + \Delta x_n) \rightarrow A(x)$ при $\Delta x_n \uparrow 0$ и при $\Delta x_n \downarrow 0$, то операция A называется монотонно непрерывной.

Лемма 3. Если мажоранта и миноранта L и K операции A – ограниченные операторы, то операция A монотонно непрерывна.

Заключение леммы следует из непрерывности операторов L, K и из свойства 2) предела в ч. у. B -пространстве. $\square$

Лемма 4. Если операторы $L, K: X \rightarrow Y$ линейные ограниченные, на порядковом отрезке $[x, x + \Delta x]$ существует непрерывная сильная производная $A'(z)$ и $K \leq A'(z) \leq L$, то операторы L, K являются соответственно мажорантой и минорантой операции A на этом отрезке.

Доказательство. Порядковый отрезок $[x, x + \Delta x]$ содержит в себе линейный отрезок с теми же концами. Согласно теории интегралов (на линейном отрезке) над операциями и над образами, с учетом сравнимости $K \leq A'(z) \leq L$ приращение

$$A(x + \Delta x) - A(x) = \int_0^1 A'(x + t \cdot \Delta x) \Delta x dt \begin{cases} \leq \int_0^1 L \Delta x dt = L \Delta x, \\ \geq \int_0^1 K \Delta x dt = K \Delta x \end{cases}$$

(сначала устанавливается сравнимость интегральных сумм и затем их пределов – интегралов). $\square$

Определение. Операция A называется изотонной на множестве E , если $A(x + \Delta x) \geq A(x)$ при $x, x + \Delta x \in E$, $\Delta x > 0$.

Для этого достаточно выполнения условий леммы 4 при $K = 0$.

2.2. Процесс двусторонних приближений.

Здесь в ч. у. B -пространстве будем строить двусторонние монотонные процессы вычисления приближенных решений к уравнению $x = A(x)$. В результате получается "вилка" приближений, дающая элементную (а не только по норме!) оценку погрешности приближения, причем эта вилка сужается и оценка улучшается на каждом шагу процесса вычисления приближений. В функциональных пространствах – оценка поточечная.

Теорема 1. Пусть X – ч. у. B -пространство, элементы $u_0, v_0 \in X$, $u_0 < v_0$, изотонная операция A отображает порядковый отрезок $[u_0, v_0]$ в X ,

$$u_0 < A(u_0), \quad v_0 > A(v_0), \quad (4)$$

существует такой линейный ограниченный оператор $L: X \rightarrow X$, $L > 0$, что

$$A(x + \Delta x) - A(x) \leq L\Delta x \quad (5)$$

при $x, x + \Delta x \in [u_0, v_0]$, $\Delta x > 0$,

$$L^n \Delta x \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Тогда процессы

$$u_{n+1} = A(u_n), \quad v_{n+1} = A(v_n) \quad (n \geq 0) \quad (7)$$

монотонно сходятся на порядковом отрезке $[u_0, v_0]$ к единственному на этом отрезке решению x^* уравнения $x = A(x)$:

$$u_n \uparrow x^*, \quad v_n \downarrow x^* \quad (n \rightarrow \infty). \quad (8)$$

Апостериорная и априорная оценки погрешности приближений:

$$0 \leq \left\{ \begin{array}{l} v_n - x^* \\ x^* - u_n \end{array} \right\} \leq v_n - u_n \leq L^n (v_0 - u_0) \rightarrow 0, \quad v_n - u_n \downarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Замечания. 1) Оценки (9) в конкретных не одномерных пространствах гораздо детальнее, чем оценки погрешности приближений по единственной числовой характеристике – норме.

2) Если операция A имеет непрерывную сильную производную и $0 \leq A'(z) \leq L$ на порядковом отрезке $[u_0, v_0]$, то операция A изотонна, условие (5) выполняется (см. лемму 4 при $K = 0$).

3) Если итерации $L^n \rightarrow 0$ сильно, то выполняется условие (6).

Доказательство. Из соотношений (4), (5), (7) следует:

$$u_0 < u_1 = A(u_0) \leq A(v_0) = v_1 < v_0, \quad 0 \leq v_1 - u_1 = A(v_0) - A(u_0) \leq L(v_0 - u_0).$$

Индуктивно устанавливаются сравнимости (1) и следующая оценка:

$$0 \leq v_n - u_n \leq L^n (v_0 - u_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (10)$$

по условию (6). Следовательно, $v_n - u_n \rightarrow 0$, т. к. норма изотонна. Согласно лемме 1, на порядковом отрезке $[u_0, v_0]$ существует элемент x^* , для которого выполняются соотношения (8) и сравнимости (3). Из соотношений (3) и (10)

следует выполнение всех соотношений (9).

Из условия (5) следует, что по лемме 3 при $K=0$, операция A монотонно непрерывна. Переходя к пределу в монотонных процессах (7), устанавливаем, что x^* – решение уравнения $x = A(x)$.

Проверим единственность решения. Пусть элемент $x \in [u_0, v_0]$ является решением данного уравнения. Формально построим процесс $x_{n+1} = A(x_n)$, $x_0 = x$. Тогда $\forall x_n = x$. Из изотонности операции A и из сравнимости $v_0 \geq x$ следует $v_1 = A(v_0) \geq A(x) = x$. Индуктивно устанавливаем $v_n \geq x$. По аналогии с выводом (10) находим, что $0 \leq v_n - x \leq L^n(v_0 - x) \rightarrow 0$, $v_n = (v_n - x) + x \rightarrow x$. Но $v_n \rightarrow x^*$, предел единственен, поэтому $x = x^*$. $\square$

2.3. Модифицированный метод Чаплыгина.

В данном разделе построим в ч. у. B -пространствах двусторонние монотонные процессы вычисления приближенных решений к уравнению $F(x) = 0$. Полученные процессы являются модификацией метода Чаплыгина – метода касательных при дополнительных условиях, связанных с частичным упорядочением в функциональном пространстве.

Теорема 2. Пусть X, Y – ч. у. B -пространства, элементы $u_0, v_0 \in X$, $u_0 < v_0$, операция F отображает порядковый отрезок $[u_0, v_0]$ в Y ,

$$F(u_0) < 0 < F(v_0), \quad (11)$$

существуют такие линейные операторы $\Gamma, \Lambda: X \rightarrow Y$, что

$$\Lambda \Delta x \leq F(x + \Delta x) - F(x) \leq \Gamma \Delta x \quad (12)$$

при $x, x + \Delta x \in [u_0, v_0]$, $\Delta x > 0$; существует обратный оператор $\Gamma^{-1}: Y \rightarrow X$, $\Gamma^{-1} > 0$, причем композиция $\Gamma^{-1}\Lambda$ является ограниченным оператором и имеется такой линейный ограниченный оператор $L: X \rightarrow X$, что

$$\Gamma^{-1}(\Gamma - \Lambda) \leq L, \quad (13)$$

и выполняется соотношение (6).

Тогда процессы

$$u_{n+1} = u_n - \Gamma^{-1}F(u_n), \quad v_{n+1} = v_n - \Gamma^{-1}F(v_n) \quad (n \geq 0) \quad (14)$$

монотонно сходятся на порядковом отрезке $[u_0, v_0]$ к единственному на этом отрезке решению x^* уравнения $F(x) = 0$ (см. соотношения (8)).

Апостериорная и априорная оценки погрешности приближений указаны в формуле (9).

Доказательство. Введем операцию A :

$$A(x) = x - \Gamma^{-1}F(x).$$

Покажем, что уравнения $F(x) = 0$ и $x = A(x)$ эквивалентны. Действи-

но, пусть $F(x) = 0$. Оператор Γ^{-1} линейный, $\Gamma^{-1}0 = 0$, $x = A(x)$. Проверим обратное. Пусть $x = A(x)$. Тогда $\Gamma^{-1}F(x) = 0$. Оператор Γ линейный, $F(x) = \Gamma\Gamma^{-1}F(x) = 0$.

Теперь проверим выполнение условий теоремы 1.

Оператор $\Gamma^{-1} > 0$. По условию (11), $F(v_0) > 0$. По свойству 8) положительных операторов, образ $\Gamma^{-1}F(v_0) > 0$, $v_0 > A(v_0)$. Аналогично, $u_0 < A(u_0)$, условия (4) выполнены.

Далее проверим выполнение условия (5). Обозначим приращение $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ при $\Delta x > 0$ и аналогично приращения других операций. Из требований (12) и изотонности положительного оператора Γ^{-1} следует $\Gamma^{-1}\Delta x \leq \Gamma^{-1}\Delta F(x) \leq \Delta x$. Из элемента Δx вычтем почленно первое из этих соотношений, с учетом условия (13) и линейности обратного оператора Γ^{-1} : $L\Delta x \geq (I - \Gamma^{-1}L)\Delta x \geq \Delta x - \Gamma^{-1}\Delta F(x) = \Delta x - \Delta\Gamma^{-1}F(x) = \Delta A(x)$,

условие (5) выполнено. Аналогично проверяется изотонность операции A .

Процессы (14) и (7), очевидно, совпадают. Из теоремы 1 следует теорема 2. $\square$

2.4. Применение модифицированного метода Чаплыгина к решению дифференциального уравнения с запаздыванием.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ определена непрерывная функция $\tau(s) \geq 0$. Следовательно, существует $\mu = \min[s - \tau(s)] \leq 0$. Непрерывная функция $\varphi(s)$ определена при $\mu \leq s \leq 0$. Задана такая функция $f(s, y, w)$, что если $y, w \in C(0, 1)$, то композиция $f(., y(.), w(.)) \in C(0, 1)$.

Пусть числа a, b_1, b_2 неотрицательны, и в некоторой области P , указанной далее, при $\Delta y \geq 0, \Delta w \geq 0$ выполняются неравенства:

$$a \cdot \Delta y \leq f(., y + \Delta y, w + \Delta w) - f(., y, w) \leq b_1 \cdot \Delta y + b_2 \cdot \Delta w. \quad (15)$$

(Для выполнения этих неравенств достаточно существования непрерывных частных производных f'_y, f'_w и условия $0 \leq a \leq f'_y \leq b_1, 0 \leq f'_w \leq b_2$ на области P .)

Требуется найти приближенное решение задачи для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом:

$$y'(s) = f(s, y(s), y(s - \tau(s))), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad y(\sigma) = \varphi(\sigma) \quad (\mu \leq \sigma \leq 0), \quad (16)$$

где непрерывная функция y определена на отрезке $[\mu, 1]$, гладкая на отрезке $[0, 1]$.

Введем непрерывную функцию

$$x(s) = y'(s) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

При $s \in [0,1]$ имеем, что

$$y(s) = \varphi(0) + \int_0^s x(t)dt, \quad y(s - \tau(s)) = \begin{cases} \varphi(s - \tau(s)) & (s \leq \tau(s)), \\ \varphi(0) + \int_0^{s-\tau(s)} x(t)dt & (s \geq \tau(s)). \end{cases} \quad (17)$$

Поэтому можно полагать функцию f операцией над x . Задача (16) может быть записана в виде функционально-интегрального уравнения

$$x(s) = f(s, y(s), y(s - \tau(s))) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

с присоединением равенств (17). Введем операцию

$$(F(x))(s) = x(s) - f(s, y(s), y(s - \tau(s))) \quad (18)$$

и уточним положение области P . Пусть имеются такие непрерывные функции $u_0(s), v_0(s)$, определенные на отрезке $[0,1]$, что

$$u_0(s) \leq v_0(s), \quad (F(u_0))(s) \leq 0 \leq (F(v_0))(s).$$

Под областью P здесь понимается множество всех функций y , удовлетворяющих равенствам (17) при $x \in C(0,1)$, $u_0(s) \leq x(s) \leq v_0(s)$.

Приращения при $\Delta x(s) \geq 0$

$$\Delta y(s) = \int_0^s \Delta x(t)dt, \quad \Delta w(s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & (s \leq \tau(s)) \\ \Delta y(s - \tau(s)) & (s \geq \tau(s)) \end{cases}. \quad (19)$$

Из соотношений $\Delta y'(s) = \Delta x(s) \geq 0$ следует нестрогое возрастание функции $\Delta y(s)$. А т. к. $s - \tau(s) \leq s$, то

$$\Delta w(s) \leq \Delta y(s). \quad (20)$$

Неотрицательные числа a, b_1, b_2 указаны в условии (15). Обозначим сумму

$$b = b_1 + b_2$$

и введем операторы

$$(\Gamma \Delta x)(s) = \Delta x(s) - a \int_0^s \Delta x(t)dt, \quad (\Lambda \Delta x)(s) = \Delta x(s) - b \int_0^s \Delta x(t)dt.$$

Из соотношений (15) и (18)-(20) следует выполнение условия (12).

Введем обозначение $z \stackrel{def}{=} (\Gamma - \Lambda) \Delta x$ ($\Delta x > 0$).

Следовательно, $z \geq 0$. Обозначим $h = b - a \geq 0$.

Тогда $z(t) = h \int_0^t \Delta x(\sigma) d\sigma$. Применяя лемму 2 и формулу Коши, устанавливаем,

$$\text{что } (\Gamma^{-1} z)(s) = z(s) + a \int_0^s e^{a(s-t)} z(t) dt.$$

(Это же можно установить и другим способом, перейдя к дифференциальной форме интегрального уравнения $\Gamma \Delta x = z$.) Оператор $\Gamma^{-1} > 0$. Композиция $\Gamma^{-1} \Lambda$, очевидно, является ограниченным оператором. Функция $a(s-t) \leq a$, поскольку

$$0 \leq t \leq s \leq 1. \text{ Образ } (\Gamma^{-1} z)(s) \leq h \int_0^s \Delta x(t)dt + ae^a \int_0^s h \int_0^t \Delta x(\sigma) d\sigma dt.$$

Из неравенств $\Delta x(\sigma) \geq 0$, $0 \leq t \leq s \leq 1$ следует, что

$$\int_0^t \Delta x(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s \Delta x(\sigma) d\sigma, \quad \int_0^s dt \int_0^t \Delta x(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s \Delta x(\sigma) d\sigma,$$

так как внутренний интеграл не зависит от t . Введем число c и оператор L :

$$c = h(1 + ae^a), \quad (21)$$

$$(L\Delta x)(s) = c \int_0^s \Delta x(t) dt$$

(интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования!). Тогда выполняется условие (13) и $(L^n \Delta x)(s) = c^n \int_0^s (s-t)^{n-1} \Delta x(t) dt / (n-1)! \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Выполнены все условия теоремы 2. Поэтому при выполнении условий, указанных в этом пункте, справедлива

Теорема 3. Задача (16) на области P имеет единственное решение y^* . Если функции $x_n = u_n$ или $x_n = v_n$ ($n \geq 0$) вычисляются по формуле

$$x_{n+1}(s) = f(s, y_n(s), y_n(s - \tau(s))) + a \int_0^s e^{a(s-t)} [x_n(t) - f(t, y_n(t), y_n(t - \tau(t)))] dt, \quad (22)$$

а функции $y_{n+1}(s)$, $y_{n+1}(s - \tau(s))$ по формулам (17) при $x = x_{n+1}$, то имеет место равномерная и монотонная сходимость:

$$u_n \uparrow (y^*)', \quad v_n \downarrow (y^*)',$$

$$\underline{y}_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0) + \int_0^s u_n(t) dt \uparrow y^*(s), \quad \bar{y}_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0) + \int_0^s v_n(t) dt \downarrow y^*(s).$$

Оценки погрешности приближений для u_n, v_n указаны в (9);

$$0 \leq \left\{ \frac{y^* - \underline{y}_n}{\bar{y}_n - y^*} \right\} \leq \bar{y}_n - \underline{y}_n \downarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Монотонная сходимость последовательности y_n к решению y^* имеет место, так как при $x^* = (y^*)'$ разность $y^*(s) - y_n(s) = \int_0^s [x^*(t) - x_n(t)] dt$, а интеграл непрерывен и изотонен. $\square$

Замечания. 1) Если в условии (15) вместо числа a принята непрерывная функция $a(s) \geq 0$, определенная на отрезке $[0, 1]$, то в процессе (22) вместо произведения $ae^{a(s-t)}$ следует принять $a(s) \cdot \exp \int_t^s a(\sigma) d\sigma$. В этом случае получается более быстрый процесс, а в выражении (21) под величиной a следует понимать $\max a(s)$.

2) Если положить $a = 0$, то процесс $x_{n+1}(s) = f(s, y_n(s), y_n(s - \tau(s)))$. В этом случае применима и теорема 1.

Глава III. Метод модулярных мажорант в полуупорядоченном B -пространстве.

3.1. Основные определения и утверждения.

Пусть X – частично упорядоченное линейное пространство. Элемент $z \geq x$, $z \geq y$ называется верхней границей множества $\{x, y\}$. Если в X существует наименьшая верхняя граница, то она называется точной верхней границей или верхней гранью,

$$x \vee y = \sup\{x, y\}: (x \vee y) \geq x, (x \vee y) \geq y, (z \geq x, z \geq y) \Rightarrow (z \geq (x \vee y)).$$

В некоторых частично упорядоченных пространствах имеются пары элементов, для которых верхняя грань не существует.

Пример. Если в пространстве $C^1(-1, 1)$ гладких функций сравнимость определять, как в C , то, например, пара функций $x = t$, $y = -t$ не имеет (гладкой) верхней грани. $\square$

Определение. *Частично упорядоченное линейное пространство X называется **полуупорядоченным**, если для любой пары элементов имеется ее верхняя грань. Элемент $|x| = x \vee (-x)$ называется модулем элемента x . Если X – B -пространство и норма изотонна: $(|x| \leq |y|) \Rightarrow (\|x\| \leq \|y\|)$, то X называется **полуупорядоченным (п. у.) B -пространством** или **КВ-линеалом**.*

Примеры. 1) В конечномерных пространствах модулем элемента $x = (x_i)$ здесь называется вектор модулей координат: $|x| = (|x_i|)$, а не длина вектора x , она является нормой.

2) В пространствах C, L_∞, L_p модуль $|x|(t) = |x(t)|$ всюду или п. в. Нормы $\|x\| = \max_t |x(t)|, \sup_t |x(t)|, \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt}$, очевидно, изотонны. $\square$

Модуль элемента обладает многими свойствами модуля функции.

$$(|x| = |y|) \Rightarrow (\|x\| = \|y\|),$$

т. к. $|x| \leq (\geq) |y|, \|x\| \leq (\geq) \|y\|$.

Модуль $|x| \geq 0$, т. к. $|x| \geq \pm x, |x| \mp x \geq 0$. Модуль $|-x| = |x|$. Далее, $(x \geq 0) \Leftrightarrow (x = |x|)$, так как если $x = |x|$, то $x \geq 0$. И обратно, если $x \geq 0$, то $-x \leq 0$ и, вследствие транзитивности сравнимости, $(x \geq 0 \geq (-x)) \Rightarrow (x \geq (-x))$, наименьшая верхняя граница $|x|$ пары $\pm x$, очевидно, равна x .

Если $\delta = |x|$, то $|\delta| = |x|$, т. к. $\delta \geq 0, \delta = |\delta|$. Поэтому $(\delta = |x|) \Rightarrow (\|\delta\| = \|x\|)$.

Из эквивалентности $(x \geq 0) \Leftrightarrow (x = |x|)$ и изотонности нормы в KB -линеале следует изотонность нормы, указанная в определении ч. у. B -пространства.

Для модулей выполняется "неравенство треугольника" – сравнимость

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

т. к. $|x| \geq (\pm x)$, $|y| \geq (\pm y)$, $|x| + |y| \geq (\pm(x + y))$, $|x| + |y| \geq (x + y) \vee (-(x + y)) = |x + y|$.

Так же, как для чисел, доказывается "следствие из неравенства треугольника":

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Модуль непрерывен: $(x_n \rightarrow x) \Rightarrow (|x_n| \rightarrow |x|)$, поскольку

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|, \quad ||x_n| - |x|| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Множество положительных элементов замкнуто: $(x_n \rightarrow x, x_n \geq 0) \Rightarrow (x \geq 0)$, т. к. $|x_n| = |x_n| \rightarrow |x|$, $x = |x|$. Отсюда следует, что KB -линеал является ч. у. B -пространством (изотонность нормы указана выше).

Множество $\{x : |x - x_0| \leq y\} = \{x : -y \leq x - x_0 \leq y\}$ является порядковым отрезком. Справедливо следствие $(0 \leq y \leq v) \Rightarrow (\{x : |x - x_0| \leq y\} \subset \{x : |x - x_0| \leq v\})$, так как сравнимость транзитивна.

Пусть X, Y – KB -линеалы.

По определению, данному в главе I, линейный оператор $\Gamma : X \rightarrow Y$ называется положительным, $\Gamma > 0$, если 1) $(x > 0) \Rightarrow (\Gamma x \geq 0)$ и 2) существует такой элемент $x > 0$, что образ $\Gamma x > 0$.

Из условия 2) следует неравенство $\Gamma \neq 0$. Покажем, что в KB -линеале верно и обратное: из неравенства $\Gamma \neq 0$ следует условие 2).

Пусть $\Gamma \neq 0$, т. е. существует такой элемент x , что $\Gamma x \neq 0$. Для линейного оператора образ $\Gamma 0 = 0$. Поэтому $x \neq 0$. Вводятся положительная и отрицательная части элемента: $x_+ = (|x| + x)/2$, $x_- = (|x| - x)/2$. Тогда $x_{\pm} \geq 0$, $x = x_+ - x_-$. Из неравенства $\Gamma x \neq 0$ следует, что $\Gamma(x_+) \neq \Gamma(x_-)$, хотя бы один из этих образов – ненулевой. Пусть $\Gamma(x_+) \neq 0$. Следовательно, $x_+ \neq 0$. По условию 1), образ $\Gamma(x_+) \geq 0$. Итак, $x_+ > 0$, $\Gamma(x_+) > 0$. $\square$

Поэтому в KB -линеале можно сформулировать эквивалентное

Определение. *Линейный оператор Γ называется положительным, $\Gamma > 0$, если $\Gamma \neq 0$, $(x > 0) \Rightarrow (\Gamma x \geq 0)$.*

Пусть л. о. операторы $\Gamma_n : X \rightarrow Y$, $\Gamma_n > 0$ ($\forall n$), ряд $\sum_0^\infty \Gamma_n$ сильно (и следовательно, слабо) сходится к л. о. оператору Γ . Обозначим частичную сумму $S_n = \sum_0^n \Gamma_k$. Тогда образы элемента $x > 0$:

$$0 \leq \Gamma_n x \leq S_n x \leq \Gamma x, \quad \forall n.$$

Последняя сравнимость следует из соотношений $S_n x \leq S_m x \rightarrow \Gamma x$ (фиксируем n , вводим $m > n$, устремим $m \rightarrow \infty$) и непрерывности соотношения сравнимости.

Определение. Если операция A отображает множество $E \subset X$ в Y и существует такой линейный положительный оператор $\Gamma: X \rightarrow Y$, что для элементов $x, x + \Delta x \in E$

$$|A(x + \Delta x) - A(x)| \leq \Gamma |\Delta x|, \quad (1)$$

то оператор Γ называется модулярной мажорантой операции A на множестве E .

В частности, если операция A линейная, то $|Ax| \leq \Gamma |x|$.

Пример. Пусть $(A(x))(s) = \int_a^b f(s, t, x(t)) dt$, $X = Y = C(a, b)$,

$$(x \in E \subset X) \Rightarrow (f[x] \in C(Q), \exists f'_x[x] \in C(Q), |f'_x[x]| \leq G \in C(Q)).$$

Тогда $|\Delta f[x]| = |f'_x[\xi] \cdot \Delta x| \leq G \cdot |\Delta x|$, $(\Gamma x)(s) = \int_a^b G(s, t) x(t) dt$. $\square$

3.2. Метод модулярных мажорант на порядковом отрезке KB -линеала.

При изучении модифицированного метода сжимающих отображений в применении к операторному уравнению $x = A(x)$ – с целью ослабления требований к операции A – вводилось ограничение на область определения этой операции: область указывалась в виде метрического шара. Однако, в конкретных приложениях в случае интегральных и дифференциальных уравнений требования к разности $A^n(x) - A^n(z)$ значений итераций выражались через условия типа Липшица для модулей функций. Поэтому более естественно область определения операции в абстрактных пространствах тоже выражать через модули. В этом случае требования к операции A еще более ослабляются и, следовательно, расширяется класс уравнений, к которым может быть применен абстрактный результат.

Кроме того, требования к разности значений *итераций* нелинейной операции, проверяются легче, если имеется модулярная мажоранта операции.

Пусть операция A отображает подмножество E KB -линеала X в X , и для элементов

$x, x + \Delta x \in E$ имеет место сравнимость (1), где л. о. оператор

$$\Gamma: X \rightarrow X, \quad \Gamma > 0, \quad \|\Gamma^n\| \leq a_n, \quad a_0 = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a < \infty. \quad (2)$$

Следовательно, существует л. о. обратный оператор (здесь):

$$(I - \Gamma)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n: X \rightarrow X, \quad (I - \Gamma)^{-1} > 0, \quad \|(I - \Gamma)^{-1}\| \leq a. \quad (3)$$

(см. лемму 2 в п. 3.1 главы I).

Выбран элемент $x_0 \in E$. Обозначим модуль невязки:

$$\delta = |x_0 - A(x_0)|.$$

Следовательно, норма $\|\delta\| = \|x_0 - A(x_0)\|$.

Теорема 1. Если множество E содержит в себе порядковый отрезок

$$\{x : |x - x_0| \leq (I - \Gamma)^{-1} \delta\}, \quad (4)$$

то на множестве E существует и единственно решение x^* уравнения $x = A(x)$, процесс

$$x_n = A(x_{n-1}) \quad (n \geq 1) \quad (5)$$

сходится на порядковом отрезке (4) к решению. Оценки погрешности приближения:

$$|x_n - x^*| \leq \Gamma^n (I - \Gamma)^{-1} \delta \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\|x_n - x^*\| \leq a_n a \|\delta\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Замечание 1. Множество E можно задавать, например, в виде порядкового отрезка $\{x : |x - x_0| \leq u\}$. Если $(I - \Gamma)^{-1} \delta \leq u$, то выполняется первое условие теоремы.

Замечание 2. Порядковый отрезок (4) является частью метрических шаров

$$\{x : \|x - x_0\| \leq \|(I - \Gamma)^{-1} \delta\|\} \subset \{x : \|x - x_0\| \leq a \|\delta\|\}.$$

В функциональных пространствах C, L_∞, L_p сравнимость $|x| \leq y$ означает поточечное неравенство функций $|x(t)| \leq y(t)$ (при всех или п. в. t), а неравенство $\|x\| \leq \|y\|$ связано только с одной числовой характеристикой функции – нормой. Поэтому любое условие на порядковом отрезке (4) гораздо слабее аналогичного условия в метрическом шаре.

Доказательство. Обозначим $\delta_k = |x_{k+1} - x_k|$. Следовательно, $\delta_0 = \delta$.

Из соотношений (1) и (5) следует, что

$$\delta_k = |A(x_k) - A(x_{k-1})| \leq \Gamma \delta_{k-1}, \quad \delta_{k-1} \leq \Gamma \delta_{k-2}.$$

Линейный оператор $\Gamma > 0$ – изотонный, поэтому $\delta_k \leq \Gamma^2 \delta_{k-2} \leq \dots \leq \Gamma^k \delta$,

$$\delta_k \leq \Gamma^k \delta.$$

Используя свойства модуля и соотношения сравнимости, устанавливаем, что для номеров $m \geq n$ модуль

$$\begin{aligned} |x_{m+1} - x_n| &\leq \sum_{k=n}^m \delta_k \leq \sum_{k=n}^m \Gamma^k \delta < \sum_{k=n}^{\infty} \Gamma^k \delta = \Gamma^n (I - \Gamma)^{-1} \delta, \\ |x_{m+1} - x_n| &< \Gamma^n (I - \Gamma)^{-1} \delta. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда и из оценок норм в (2), (3), а также вследствие изотонности нормы устанавливаем неравенство

$$\|x_{m+1} - x_n\| \leq a_n a \|\delta\| \rightarrow 0 \quad (m \geq n \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Последовательность x_n сходится в себе, поэтому имеет предел x^* в B -пространстве X .

Полагая $n=0$ в соотношениях сравнимости (8), находим, что все приближения находятся на порядковом отрезке (4). Переходя при $n=0$ в соотношениях (8) к пределу при $m \rightarrow \infty$, учитывая непрерывность модуля и соотношения сравнимости, устанавливаем, что элемент x^* тоже находится на порядковом отрезке (4).

Из сравнимости (1), оценки в (2) нормы оператора Γ , а также из изотонности нормы следует неравенство $\|A(x) - A(z)\| \leq a_1 \|x - z\|$, операция A непрерывна. Переходя к пределу в равенстве (5), находим, что x^* – решение уравнения $x = A(x)$.

Итак, все приближения и решение находятся на порядковом отрезке (4), и процесс (5) сходится к решению.

Проверим единственность решения на множестве E . Пусть $x \in E$, $x = A(x)$. Из сравнимости (1) и изотонности оператора Γ следует (ср. выше оценку δ_k):

$$\begin{aligned} |x^* - x| &= |A(x^*) - A(x)| \leq \Gamma |x^* - x| \leq \dots \leq \Gamma^n |x^* - x|, \\ |x^* - x| &\leq \Gamma^n |x^* - x|, \quad \forall n. \end{aligned}$$

Из изотонности нормы в KB -линеале и из оценки нормы итерации в (2) следует, что

$$\|x^* - x\| \leq a_n \|x^* - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x = x^*, \text{ решение единственно.}$$

В соотношениях (8) фиксируем произвольный номер n и устремим $m \rightarrow \infty$. Вследствие непрерывности модуля, $|x_{m+1} - x_n| \rightarrow |x^* - x_n|$. Соотношение сравнимости непрерывно, поэтому из соотношений (8) следует соотношение сравнимости в (6), а из него следует неравенство в (7), т. к. норма изотонна. $\square$

Замечание 3. При поточечном смысле сравнимости в функциональных пространствах оценка (6) значительно подробнее оценки (7).

3.3. Применение метода модулярных мажорант на порядковом отрезке KB -линеала к задаче для дифференциального уравнения.

Выставим условия. Аргументы $s \in [0,1]$. Функции y принадлежат некоторому достаточно большому множеству $E \subset Y = C^2(0,1)$. Задача

$$y''(s) = f(s, y(s), y'(s)), \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta. \quad (10)$$

Правая часть дифференциального уравнения обозначена $f[y](s)$.

$$(y \in E) \Rightarrow (f[y] \in X = C).$$

Для функций $y, y + \Delta y \in E$, удовлетворяющих данным начальным условиям, выполнено условие Липшица

$$|f[y + \Delta y] - f[y]| \leq c_0 |\Delta y| + c_1 |\Delta y'|.$$

Обозначим $c = c_0 + c_1$. Произведем подстановку $x = y''$.

Тогда $y(s) = \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)x(t)dt$, $y'(s) = \beta + \int_0^s x(t)dt$.

Следовательно, функцию f можно считать операцией над x . По определению,

$$A(x) = f[y].$$

Задача (10) сводится к функционально-интегральному уравнению $x = A(x)$ и восстановлению функции y . Приращению Δx соответствуют интегралы

$$\Delta y(s) = \int_0^s (s-t)\Delta x(t)dt, \quad \Delta y'(s) = \int_0^s \Delta x(t)dt,$$

т. к. $\Delta y(0) = \Delta y'(0) = 0$. Введем оператор Γ (см. выше обозначение c):

$$(\Gamma x)(s) = c \int_0^s x(t)dt.$$

Из условий Липшица и неравенств $0 \leq s-t \leq 1$ следует:

$$|A(x + \Delta x) - A(x)|(s) \leq \int_0^s [c_0(s-t) + c_1] \cdot |\Delta x(t)|dt \leq \int_0^s (c_0 + c_1) |\Delta x(t)|dt = (\Gamma |\Delta x|)(s).$$

Выберем первоначальное приближение $y_0 \in E$, $y_0(0) = \alpha$, $y_0'(0) = \beta$

и введем модуль невязки $\delta(s) = |y_0''(s) - f(s, y_0(s), y_0'(s))|$.

По формуле Коши повторного интегрирования с переменным пределом интегрирования,

$$\begin{aligned} (\Gamma^n g)(s) &= c^n \int_0^s (s-t)^{n-1} g(t)dt / (n-1)!, \\ a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \|\Gamma^n\| = c^n \max_s \int_0^s (s-t)^{n-1} dt / (n-1)! = c^n / n!, \\ ((I - \Gamma)^{-1} \delta)(t) &\leq \delta(t) + c \int_0^t e^{c(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau, \\ \|(I - \Gamma)^{-1}\| &\leq a = e^c \end{aligned}$$

(см. (2), (3)). Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Если множество E содержит в себе множество

$$\left\{ y: y \in Y, y(0) = \alpha, y'(0) = \beta, |(y - y_0)''(t)| \leq \delta(t) + c \int_0^t e^{c(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau \right\}, \quad (11)$$

то на множестве E существует и единственно решение y^* задачи (10), процесс

$$x_n(s) = y_n''(s) = f(s, y_{n-1}(s), y_{n-1}'(s)), \quad y_n'(s) = \beta + \int_0^s x_n(t)dt,$$

$$y_n(s) = \alpha + \int_0^s y_n'(t)dt = \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)x_n(t)dt \quad (n \geq 1)$$

сходится на множестве (11) равномерно вместе с производными к решению:

$$y_n \rightarrow y^*, \quad y_n' \rightarrow y^{*'}, \quad y_n'' \rightarrow y^{*''}.$$

Оценки погрешности приближения – разности $\Delta_n = y_n - y^*$:

$$|\Delta_n''(s)| \leq \phi_n(s) = \frac{c^n}{(n-1)!} \int_0^s (s-t)^{n-1} \left[\delta(t) + c \int_0^t e^{c(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau \right] dt,$$

$$|\Delta'_n(s)| \leq \psi_n(s) = \int_0^s \phi_n(t) dt, \quad |\Delta_n(s)| \leq \int_0^s \psi_n(t) dt;$$

$$|\Delta''_n(s)| \leq c^n e^c \max_t \delta(t) / n!, \quad \Delta'_n(s) \leq \int_0^1 \phi_n(t) dt, \quad |\Delta_n(s)| \leq \int_0^1 \psi_n(t) dt \quad (\forall s).$$

(Последние три оценки следуют из оценки (7)). $\square$

3.4. Применение метода модулярных мажорант к задачам для полулинейных операторного и дифференциального уравнений.

В целях применения метода к задачам для полулинейных дифференциальных уравнений, установим другие следствия из теоремы 1.

Условия будут даны для уравнений – операторного (далее **абстр.**) и дифференциального (далее **дифф.**). Окончательные результаты будут сформулированы в виде теорем.

Абстр. X – KB -линеал, Y – линейное подпространство в X , Z – линейное пространство. Линейные операторы $D: Y \rightarrow X$, $N: Y \rightarrow Z$. Выбран элемент $z \in Z$. Указано некоторое достаточно большое подмножество $E \subset Y$ (требования к нему будут указаны в дальнейшем). Операция $B: E \mapsto$. Требуется найти приближенное решение задачи

$$Dy = B(y), \quad Ny = z. \quad (12)$$

Дифф. $X = C(0,1)$, $E \subset Y = C^2(0,1)$, $Z = R^2$

(для функций в пространстве C^2 используется норма, индуцированная из C).

$$Dy = y'', \quad (B(y))(s) = f(s, y(s)), \quad Ny = \{y(0), y'(0)\}, \quad z = \{\alpha, \beta\}.$$

Обозначение $(f[y])(s) = f(s, y(s))$. Если $y \in E$, то $f[y] \in X$.

Поставлена задача Коши

$$y''(s) = f(s, y(s)), \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta. \quad (13)$$

Абстр. Введем линейное подпространство

$$M = \{\Delta y : \Delta y \in Y, \quad N\Delta y = 0\}.$$

Оператор D устанавливает биекцию $M \leftrightarrow X$, т. е. данная задача

$$D\Delta y = x, \quad N\Delta y = 0$$

имеет единственное решение $\Delta y \in M$ при любой правой части $x \in X$. Рассматривается случай, когда *известны* решения этих задач:

$$\Delta y = D^{-1}x, \quad D^{-1}: X \rightarrow M.$$

Пусть также *известно* решение $\tilde{y}$ задачи:

$$D\tilde{y} = \tilde{x}.$$

Следовательно, решение $y \in Y$ задачи при $x \in X$

$$Dy = x, \quad Ny = z$$

имеет вид

$$y = \tilde{y}.$$

Дифф. $M = \{\Delta y : \Delta y \in Y, \Delta y(0) = \Delta y'(0) = 0\}$. Решения задач

$$\Delta y'' = x, \quad \Delta y(0) = \Delta y'(0) = 0,$$

$$\tilde{y}'' = x, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$$

имеют соответственно вид

$$\Delta y(s) = (D^{-1}x)(s) = \int_0^s (s-t)x(t)dt,$$

$$\tilde{y} = \beta s,$$

$$y(s) = \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)x(t)dt.$$

Абстр. Введем подстановку и операцию:

$$x = Dy, \quad A(x) = B(\tilde{y}).$$

Тогда задача (12) сводится к уравнению $x = A(x)$ и восстановлению $y = \tilde{y}$.

Дифф. Задача (13) сводится к функционально-интегральному уравнению

$$x(s) = f(s, \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)x(t)dt)$$

и восстановлению функции $y(s)$.

Абстр. Пусть операции D^{-1}, B имеют модулярные мажоранты:

$$|D^{-1}x| \leq C|x| \quad (x \in X),$$

$$|B(y + \Delta y) - B(y)| \leq \Lambda |\Delta y| \quad (y, y + \Delta y \in E, \quad N\Delta y = 0),$$

где линейные ограниченные операторы

$$C : X \rightarrow M, \quad C > 0; \quad \Lambda : M \rightarrow X, \quad \Lambda > 0.$$

Введем композицию

$$\Gamma = \Lambda C : X \rightarrow X.$$

Тогда

$$|A(x + \Delta x) - A(x)| = |B(\tilde{y} + \Delta \tilde{y}) - B(\tilde{y})| = |\Lambda C \Delta x| \leq \Lambda C |\Delta x|,$$

выполняется соотношение сравнимости (1).

Дифф. $C = D^{-1}$. Пусть функция f удовлетворяет условию Липшица по y

$$|f[y + \Delta y] - f[y]| \leq c \cdot |\Delta y| \quad (y, y + \Delta y \in E, \quad \Delta y \in M).$$

Положим здесь $\Lambda \Delta y = c \cdot \Delta y$, тогда

$$(\Gamma x)(s) = c \int_0^s (s-t)x(t)dt. \quad (14)$$

Абстр. Пусть выполняется условие (2). Выбрано первоначальное приближение

$$y_0 \in E, \quad Ny_0 = z.$$

Обозначим модуль невязки:

$$\delta = |Dy_0 - B(y_0)|.$$

Следовательно, норма $\|\delta\| = \|Dy_0 - B(y_0)\|$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 3. Если множество E содержит в себе множество

$$\{y: y \in Y, Ny = z, |D(y - y_0)| \leq (I - \Gamma)^{-1} \delta\}, \quad (15)$$

то на множестве E существует и единственно решение y^* задачи (12), процесс вычисления приближений y_n по формулам

$$x_n = Dy_n = B(y_{n-1}), \quad y_n = \tilde{\cdot} \quad (n \geq 1)$$

сходится на множестве (15) вместе с образами Dy_n к решению: $y_n \rightarrow y^*, x_n \rightarrow Dy^*$.

Оценки погрешности приближения (см. (2)) – разности $\Delta_n = y_n - y^*$:

$$\begin{aligned} |D\Delta_n| &\leq \phi_n = \Gamma^n (I - \Gamma)^{-1} \delta, \quad |\Delta_n| \leq C\phi_n; \\ \|D\Delta_n\| &\leq \|\phi_n\| \leq a_n a \|\delta\|, \quad \|\Delta_n\| \leq \|C\| \cdot \|\phi_n\|. \end{aligned}$$

Дифф. Выбрано первоначальное приближение

$$y_0 \in E, \quad y_0(0) = \alpha, \quad y'_0(0) = \beta.$$

Здесь модуль невязки:

$$\delta(s) = |y''_0(s) - f(s, y_0(s))|. \quad (16)$$

Интеграл $\int_0^s (s-t)x(t)dt$ является результатом второй итерации операции интегрирования $\int_0^s x(t)dt$. Поэтому n -ая итерация оператора (14) является $2n$ -ой итерацией операции

$\sqrt{c} \cdot \int_0^s x(t)dt$. Используя формулу Коши при $n \geq 1$ и равенство $(I - \Gamma)^{-1} = I + \sum_1^\infty \Gamma^n$, устанавливаем соотношения

$$\begin{aligned} (\Gamma^n \delta)(s) &= c^n \int_0^s (s-t)^{2n-1} \delta(t) dt / (2n-1)!, \\ ((I - \Gamma)^{-1} \delta)(s) &= \delta(s) + \sqrt{c} \cdot \sum_1^\infty \frac{(\sqrt{c})^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^s (s-t)^{2n-1} \delta(t) dt = \delta(s) + \sqrt{c} \cdot \int_0^s Sh(\sqrt{c}(s-t)) \delta(t) dt \\ a_n &\stackrel{def}{=} \|\Gamma^n\| = c^n \max_s \int_0^s (s-t)^{2n-1} dt / (2n-1)! = c^n / (2n)! \quad (n \geq 1, a_0 = 1), \\ \|(I - \Gamma)^{-1}\| &\leq a = \sum_0^\infty a_n = Ch\sqrt{c}. \end{aligned}$$

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. Если множество E содержит в себе множество

$$\left\{ y: y \in Y, y(0) = \alpha, y'(0) = \beta, |(y - y_0)''(s)| \leq \delta(s) + \sqrt{c} \cdot \int_0^s Sh(\sqrt{c}(s-t))\delta(t)dt \right\} \quad (17)$$

(см. (16)), то на множестве E существует и единственно решение y^* задачи (13), процесс вычисления приближений y_n по формулам

$$x_n(s) = y_n''(s) = f(s, y_{n-1}(s)), \quad y_n(s) = \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)x_n(t)dt \quad (n \geq 1)$$

сходится на множестве (17) равномерно вместе с производными к решению:

$$y_n \rightarrow y^*, \quad y_n' \rightarrow y^{*'}, \quad y_n'' \rightarrow y^{*''}.$$

Оценки погрешности приближения – разности $\Delta_n = y_n - y^*$:

$$|\Delta_n''(s)| \leq \phi_n(s) = c^n \int_0^s (s-t)^{2n-1} \left[\delta(t) + \sqrt{c} \cdot \int_0^t Sh(\sqrt{c}(t-\tau))\delta(\tau)d\tau \right] dt / (2n-1)!,$$

$$|\Delta_n'(s)| \leq \psi_n(s) = \int_0^s \phi_n(t)dt, \quad |\Delta_n(s)| \leq \int_0^s \psi_n(t)dt;$$

$$|\Delta_n''(s)| \leq c^n Ch\sqrt{c} \cdot \max_t \delta(t) / (2n)!, \quad |\Delta_n'(s)| \leq \int_0^1 \phi_n(t)dt, \quad |\Delta_n(s)| \leq \max_t \phi_n(t) / 2, \quad \forall s.$$

Замечания. Оценки для первых производных устанавливаются с учетом того, что из равенства $\Delta_n'(0) = 0$ следует $\Delta_n'(s) = \int_0^s \Delta_n''(t)dt$.

Последняя оценка в теореме 3 следует из последней оценки погрешности приближения в теореме 2 и из соотношений

$$(Cx)(s) = (D^{-1}x)(s) = \int_0^s (s-t)x(t)dt, \quad \|C\| = \max_s \int_0^s (s-t)dt = 1/2. \quad \square$$

Оценку ϕ_n можно упростить, например, используя неравенство $s-t \leq s$.

3.5. Применение метода модулярных мажорант к уравнению в частных производных гиперболического типа.

Поставим условия. Точки (s, t) заполняют квадрат $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Функции y принадлежат некоторому достаточно большому множеству $E \subset Y = C^2(Q)$. Задача Коши с начальными данными на сторонах квадрата Q , лежащих на осях Os, Ot :

$$y_{st}'' = f(s, t, y(s, t)), \quad (18)$$

$$y(s, 0) = z_1(s), \quad y(0, t) = z_2(t), \quad z_1(0) = z_2(0). \quad (19)$$

Функции $z_k \in C^1(0, 1)$. Правая часть уравнения (18) обозначена $f[y](s, t)$.

$$(y \in E) \Rightarrow (f[y] \in X = C(Q)).$$

Введем линейное подпространство

$$M = \{\Delta y : \Delta y \in Y, \Delta y(s, 0) = \Delta y(0, t) = 0\}.$$

Выполняется условие Липшица при $y, y + \Delta y \in E, \Delta y \in M$:

$$|f[y + \Delta y] - f[y]| \leq c|\Delta y|.$$

Введем операции и элемент:

$$Dy = y''_{st}, \quad B(y) = f[y], \quad Ny = \{y(s, 0), y(0, t)\}, \quad \Lambda \Delta y = c \cdot \Delta y, \quad C = D^{-1}, \quad \Gamma = c \cdot C, \quad z = \{z_1, z_2\}$$

Здесь

$$(\Gamma x)(s, t) = c \int_0^s d\sigma \int_0^t x(\sigma, \tau) d\tau,$$

а решение задачи $D\tilde{y} = \tilde{f}$ имеет вид $\tilde{y}(s) + z_2(t) - z_1(0)$.

Выберем первоначальное приближение $y_0 \in E$, удовлетворяющее условиям (19), и введем модуль $\delta(s, t) = |\partial^2 y_0 / \partial s \partial t - f[y_0]|(s, t)$.

Используя формулу Коши n -кратного интегрирования с переменным верхним пределом и теорему Фубини о возможности смены порядка в повторном интегрировании, устанавливаем, что образы

$$(\Gamma^n g)(s, t) = c^n \int_0^s (s - \sigma)^{n-1} d\sigma \int_0^t (t - \tau)^{n-1} g(\sigma, \tau) d\tau / [(n-1)!]^2 \quad (n \geq 1). \quad (20)$$

Обозначим сумму ряда:

$$S(p) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n / (n!)^2 \leq e^p.$$

Тогда образ в преобразовании $(I - \Gamma)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^n$ можно записать в виде

$$g(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} ((I - \Gamma)^{-1} \delta)(s, t) = \delta(s, t) + c \int_0^s d\sigma \int_0^t S[c(s - \sigma)(t - \tau)] \delta(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (21)$$

Нормы

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \|\Gamma^n\| = c^n \max_{s, t} \int_0^s (s - \sigma)^{n-1} d\sigma \int_0^t (t - \tau)^{n-1} d\tau / [(n-1)!]^2 = c^n / (n!)^2 \quad (n \geq 1, a_0 = 1),$$

$$\|(I - \Gamma)^{-1}\| \leq a = S(c) \leq e^p. \quad \square$$

Из теоремы 3 следует

Теорема 5. Если множество E содержит в себе множество E_0 :

$$E_0 = \{y : y \in Y, y(s, 0) = z_1(s), y(0, t) = z_2(t),$$

$$|(y - y_0)''_{st}| \leq \delta(s, t) + c \int_0^s d\sigma \int_0^t S[c(s - \sigma)(t - \tau)] \delta(\sigma, \tau) d\sigma d\tau\},$$

то на множестве E существует и единственно решение y^* задачи (18), (19), процесс вычисления приближений y_n по формулам

$$x_n(s, t) = (y_n)''_{st} = f(s, t, y_{n-1}(s, t)), \quad y_n(s, t) = z_1(s) + z_2(t) - z_1(0) + \int_0^s d\sigma \int_0^t x_n(\sigma, \tau) d\tau$$

сходится на множестве E_0 равномерно вместе с производными к решению:

$$y_n \rightarrow y^*, \quad (y_n)'_s \rightarrow (y^*)'_s, \quad (y_n)'_t \rightarrow (y^*)'_t, \quad (y_n)''_{st} \rightarrow (y^*)''_{st}.$$

Оценки погрешности приближения (см. (20), (21)) – разности $\Delta_n = y_n - y^*$:

$$\begin{aligned}
|(\Delta_n)''_{st}| &\leq d_n \stackrel{def}{=} \Gamma^n (I - \Gamma)^{-1} \delta, \quad |(\Delta_n)'_s| \leq \int_0^t d_n(s, \tau) d\tau, \quad |(\Delta_n)'_t| \leq \int_0^s d_n(\sigma, t) d\sigma, \\
|\Delta_n| &\leq \int_0^s d\sigma \int_0^t d_n(\sigma, \tau) d\tau; \\
|(\Delta_n)''_{st}(s, t)| &\leq b_n \stackrel{def}{=} c^n S(c) \max_{\sigma, \tau} \delta(\sigma, \tau), \quad |\Delta_n(s, t)| \leq \iint_Q d_n(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \leq b_n, \quad \forall (s, t).
\end{aligned}$$

Литература

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. // – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.
2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. // М., Мир. 1978. –336 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. // – М.: Наука, 1984. – 750 с.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика // М., Физматлит, 2000. 295 с.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М.: Наука, 1971. - 296 с.
6. Мышкис А.Д. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. - 1952. - том №7, выпуск 4 (50). - С. 190-196.
7. Слугин С.Н., Кротова В.С. Прикладной функциональный анализ: моделирование, управление, оптимизация, приближенные методы: учебное пособие. - Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 1993. - 51 с.
8. Кротов Н.В. Метод усреднения и модулярных мажорант для дифференциального уравнения с запаздыванием // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, серии Математическое моделирование, Оптимальное управление.-2008. - №6. - с. 161-164.
9. Треногин В.А. Функциональный анализ // М.: Физматлит. 2002. 488 с.